JEDNODUCHÝ INTEGRÁL příklady

pro vysoké školy

Bohemicus mathematicus
doctor
Pavel Novotný

Vzor citace:

NOVOTNÝ, P. *Jednoduchý integrál příklady : pro vysoké školy*. Bučovice : Nakladatelství Martin Stříž, 2012. 164 s. ISBN 978-80-87106-57-0.

Autor: Pavel Novotný
aww@centrum.cz

Obálka: Petr Bělej

Tisk: Tribun EU s.r.o., Brno

Nakladatelství, sazba: Nakladatelství Martin Stříž, Bučovice
martin@striz.cz
www.striz.cz

Vydání: První, 2012

ISBN 978-80-87106-57-0

Vážení studenti, milí čtenáři. Pro Vás, kteří potřebujete získat stručný, jasný a přehledný úvod do vyšší matematiky, jsem připravil sbírku vyřešených integrálů z vysokoškolské matematiky a systematicky je uspořádal do jednotlivých kapitol. Těchto bezmála 400 příkladů by Vám mělo přinést nezbytné vědomosti a dovednosti pro další studium integrálního počtu. Publikace je určena zejména studentům vysokých škol, kteří se v rámci cvičení uvedenou problematikou prakticky zabývají a hledají návody a postupy pro řešení konkrétních příkladů. Věřím, že publikace bude pro Vaše studium matematiky užitečným přínosem a že Vás osloví. V tomto snažení Vám všem přeji hodně zdaru a také dobré pocity z toho, že se po rychlém zorientování v knize naučíte příklady samostatně řešit a porozumíte postupům zde uvedeným.

autor

srpen 2012

Obsah

$$\textbf{134)}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{(\frac{2ax+b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=$$

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a})=a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{b^2}{4a^2}+\tfrac{c}{a}\right]=a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2+\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{\frac{(2ax+b)^2}{4a^2}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{\frac{4ac-b^2}{4a^2}\left[\frac{(2ax+b)^2}{4ac-b^2}+1\right]}=\tfrac{1}{a}\cdot\tfrac{4a^2}{4ac-b^2}\int\frac{dx}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})^2+1}=$$

$$u=\tfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\qquad du=\tfrac{2adx}{\sqrt{4ac-b^2}}\Rightarrow dx=\tfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}du$$

$$=\tfrac{4a}{4ac-b^2}\int\frac{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}{u^2+1}du=\tfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,arc\text{tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+c$$

$$\textbf{135)}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{(\frac{2ax+b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a})=a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{b^2}{4a^2}+\tfrac{c}{a}\right]=a\left[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{\frac{(2ax+b)^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\tfrac{1}{a}\int\frac{dx}{\frac{b^2-4ac}{4a^2}\left[\frac{(2ax+b)^2}{b^2-4ac}-1\right]}=\tfrac{1}{a}\cdot\tfrac{4a^2}{b^2-4ac}\int\frac{dx}{(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}})^2-1}=$$

$$u=\tfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\qquad du=\tfrac{2adx}{\sqrt{b^2-4ac}}\Rightarrow dx=\tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}du$$

$$=\tfrac{4a}{b^2-4ac}\int\frac{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{u^2-1}du=\tfrac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\int\frac{du}{u^2-1}=\tfrac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}-1}{\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+1}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+c$$

$$\textbf{136)}\int\frac{x^3+2}{2x-3}dx=\int(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{4}+\frac{9}{8}+\frac{\frac{43}{8}}{2x-3})dx=$$

$$(x^3+2):(2x-3)=\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{3x}{4}+\tfrac{9}{8}+\tfrac{\frac{43}{8}}{2x-3}$$

$$\pm x^3\mp\tfrac{3}{2}x^2$$

$$0\quad \tfrac{3}{2}x^2+2$$

$$\pm\tfrac{3}{2}x^2\mp\tfrac{9}{4}x$$

$$0\quad \tfrac{9}{4}x+2$$

$$\pm\tfrac{9}{4}x\mp\tfrac{27}{8}$$

$$0\;+\tfrac{43}{8}$$

$$=\tfrac{1}{2}\int x^2dx+\tfrac{3}{4}\int xdx+\tfrac{9}{8}\int dx+\tfrac{43}{8}\int\tfrac{dx}{2x-3}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{9}{8}x+\tfrac{43}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\int\tfrac{2dx}{2x-3}=$$

$$=\frac{x^3}{6}+\frac{3x^2}{8}+\frac{9x}{8}+\frac{43}{16}\ln|2x-3|+c$$

$$\textbf{137)}\int\frac{x^2}{x^2-5x+4}dx=\int\frac{x^2}{(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}}dx=\int\frac{x^2dx}{(x-\frac{5}{2}-\frac{3}{2})(x-\frac{5}{2}+\frac{3}{2})}=\int\frac{x^2dx}{(x-4)(x-1)}$$

$$x^2-5x+4=(x-\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{25}{4}+4$$

$$\frac{x^2}{(x-4)(x-1)}=\frac{Ax}{x-4}+\frac{Bx}{x-1}$$

$$x^2=Ax(x-1)+Bx(x-4)$$

$$x^2=Ax^2-Ax+Bx^2-4Bx$$

$$\textbf{196)}\int\frac{x}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2xdx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x-3+3}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x-3}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx=-\sqrt{-x^2-3x+4}-\frac{3}{2}arc\sin\frac{2x+3}{5}+c$$

$$-\frac{1}{2}.2\sqrt{-x^2-3x+4}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx+c=-\sqrt{-x^2-3x+4}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx+c$$

$$I_1=\int\frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}}dx=\frac{2}{5}\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x+3}{5})^2}}dx=\frac{2}{5}.\frac{5}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=arc\sin t=arc\sin\frac{2x+3}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}}=\frac{1}{\sqrt{(-1)(x^2+3x-4)}}=\frac{1}{\sqrt{(-1)\left[(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-\frac{16}{4}\right]}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{(2x+3)^2}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4}\left[1-\frac{(2x+3)^2}{25}\right]}}=\frac{1}{\frac{5}{2}\sqrt{1-(\frac{2x+3}{5})^2}}=\frac{2}{5}.\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x+3}{5})^2}}$$

$$t=\frac{2x+3}{5}\Rightarrow dt=\frac{2}{5}dx\Rightarrow dx=\frac{5}{2}dt$$

$$\textbf{197)}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}}\int\frac{1}{\sqrt{(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}})^2-1}}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})}}=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\left[(\frac{2ax+b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]}}=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\frac{(2ax+b)^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}\left[\frac{(2ax+b)^2}{b^2-4ac}-1\right]}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sqrt{(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}})^2-1}}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}}.\frac{1}{\sqrt{(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}})^2-1}}$$

$$t=\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\Rightarrow dt=\frac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}}dx\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}dt$$

$$I=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}}.\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C$$

podle $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\sqrt{(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}})^2-1}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\sqrt{\frac{4a^2x^2+4abx+4ac}{b^2-4ac}}\right|+C$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\sqrt{\frac{4a(ax^2+bx+c)}{b^2-4ac}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}}(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}.\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\ )\right|+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}}\right|+\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C$$

číslo $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}}\right|$ *je zahrnuto v integrační konstantě*