

*JEDNODUCHÝ  
INTEGRÁL  
příklady*

*pro vysoké školy*

*Bohemicus mathematicus  
doctor  
Pavel Novotný  
© 2012*

Vzor citace:

NOVOTNÝ, P. *Jednoduchý integrál příklady : pro vysoké školy*. Bučovice : Nakladatelství Martin Stříž, 2012. 164 s. ISBN 978-80-87106-57-0.

Autor: Pavel Novotný  
aww@centrum.cz

Obálka: Petr Bělej

Tisk: Tribun EU s.r.o., Brno

Nakladatelství, sazba: Nakladatelství Martin Stříž, Bučovice  
martin@striz.cz  
www.striz.cz

Vydání: První, 2012

**ISBN 978-80-87106-57-0**

*Vážení studenti, milí čtenáři. Pro Vás, kteří potřebujete získat stručný, jasný a přehledný úvod do vyšší matematiky, jsem připravil sbírku vyřešených integrálů z vysokoškolské matematiky a systematicky je uspořádal do jednotlivých kapitol. Těchto bezmála 400 příkladů by Vám mělo přinést nezbytné vědomosti a dovednosti pro další studium integrálního počtu. Publikace je určena zejména studentům vysokých škol, kteří se v rámci cvičení uvedenou problematikou prakticky zabývají a hledají návody a postupy pro řešení konkrétních příkladů. Věřím, že publikace bude pro Vaše studium matematiky užitečným přínosem a že Vás osloví. V tomto snažení Vám všem přeji hodně zdaru a také dobré pocity z toho, že se po rychlém zorientování v knize naučíte příklady samostatně řešit a porozumíte postupům zde uvedeným.*

*autor*

*srpen 2012*

## Obsah

<i>Neurčitý integrál</i> .....	4
<i>Integrace metodou přímou</i> .....	4
<i>Integrace metodou per partes</i> .....	7
<i>Integrace metodou substituční</i> .....	12
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ .....	13
<i>Integrál typu</i> $\int f(x)f'(x)dx$ .....	20
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ .....	20
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ .....	21
<i>Obecné řešení integrálu</i> $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ .....	24
<i>Obecné řešení integrálu</i> $\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$ .....	27
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx$ .....	30
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$ .....	30
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx$ .....	31
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ .....	32
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$ .....	33
<i>Integrály typu</i> $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ řešené metodou Ostrogradského .....	35
<i>Integrál typu</i> $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ .....	42
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ .....	47
<i>Integrál typu</i> $\int \sqrt{\frac{ax + b}{cx + d}} dx$ .....	52
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ .....	59
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ .....	60
<i>Integrály binomické</i> $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ .....	61

<i>Integrovaní goniometrických funkcí</i> .....	69
<i>Integrovaní logaritmických funkcí</i> .....	81
<i>Integrovaní exponenciálních funkcí</i> .....	85
<i>Obecné řešení integrálu</i> $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} dx$ .....	90
<i>Obecné řešení integrálu</i> $\int \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} dx$ .....	91
<i>Obecné řešení integrálu</i> $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ .....	92
<i>Integrál</i> $\int \frac{dx}{(x^3 \pm 1)^n}$ .....	92
<i>Integrály vyjádřené rekurentními vztahy</i> .....	93
<i>Integrál</i> $\int \sqrt{\sin x} dx$ .....	93
<i>Rekurentní vzorec pro binomický integrál</i> $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ .....	94
<i>Odvození a použití rekurentního vztahu integrálu</i> $\int \cos^n x dx$ .....	94
<i>Odvození a použití rekurentního vztahu integrálu</i> $\int \sin^n x dx$ .....	95
<i>Odvození rekurentního vztahu integrálu</i> $\int \operatorname{tg}^n x dx$ .....	96
<i>Obecné řešení integrálu</i> $\int \frac{ax^2}{\sqrt{b^2x^2+c^2}} dx$ .....	97
<i>Integrál</i> $\int \sqrt{x+\sqrt{x}} dx$ .....	98
<i>Integrál</i> $\int \sqrt{1+x^m} dx$ .....	99
<i>Seznam integrálů s goniometrickými funkcemi</i> .....	99
<i>Seznam integrálů s logaritmy</i> .....	103
<i>Seznam integrálů s exponenciálními funkcemi</i> .....	105
<i>Seznam integrálů s racionální lomenou funkcí</i> .....	106
<i>Seznam integrálů s odmocninami</i> .....	109
<i>Řešení speciálních případů</i> .....	114
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{dx}{(x-a)^k \sqrt{ax^2+bx+c}}$ .....	114
<i>Integrál typu</i> $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ .....	115

<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{Ax+B}{(mx^2+px+q)^k \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	117
	a) $m=1 \wedge \frac{b}{a}=p$ b) $\frac{b}{a}=\frac{p}{m}$	
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{Ax+B}{(mx^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	119
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	120
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{dx}{x+\sqrt{ax^2+bx+c}}$	121
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{\alpha \sin x+\beta \cos x}{a \sin x+b \cos x} dx$	122
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{\alpha \sin x+\beta \cos x+\gamma}{a \sin x+b \cos x+c} dx$	124
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{\alpha \sin^2 x+2\beta \sin x \cos x+\gamma \cos^2 x}{a \sin x+b \cos x} dx$	127
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{\alpha \sin x+\beta \cos x}{a \sin^2 x+2b \sin x \cos x+c \cos^2 x} dx$	129
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{dx}{a+b \sin cx}$	129
<b>Integrál typu</b>	$\int \frac{dx}{a+b \cos cx}$	130
<b>Integrál typu</b>	$\int \sin^u x \cos^v x dx$	131
<b>Aplikace – obsah rovinných útvarů</b>		131
	<i>délka oblouku křivky</i>	141
	<i>objem rotačního tělesa</i>	145
	<i>obsah rotační plochy</i>	152
	<i>statický moment</i>	156
	<i>moment setrvačnosti</i>	161
<b>Seznam použité literatury</b>		164

$$\begin{aligned}
 134) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}} = \\
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \\
 &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\frac{(2ax+b)^2}{4a^2} + \frac{4ac - b^2}{4a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\frac{4ac - b^2}{4a^2} \left[\frac{(2ax+b)^2}{4ac - b^2} + 1\right]} = \frac{1}{a} \cdot \frac{4a^2}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)^2 + 1} = \\
 u &= \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad du = \frac{2adx}{\sqrt{4ac - b^2}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} du \\
 &= \frac{4a}{4ac - b^2} \int \frac{\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} du}{u^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac - b^2}} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 135) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \\
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
 &= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\frac{(2ax+b)^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \left[\frac{(2ax+b)^2}{b^2 - 4ac} - 1\right]} = \frac{1}{a} \cdot \frac{4a^2}{b^2 - 4ac} \int \frac{dx}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)^2 - 1} = \\
 u &= \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad du = \frac{2adx}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} du \\
 &= \frac{4a}{b^2 - 4ac} \int \frac{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} du}{u^2 - 1} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + c = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} - 1}{\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + 1} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax+b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + c
 \end{aligned}$$

$$136) \int \frac{x^3 + 2}{2x - 3} dx = \int \left( \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{9}{8} + \frac{\frac{43}{8}}{2x - 3} \right) dx =$$

$$(x^3 + 2) : (2x - 3) = \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{9}{8} + \frac{\frac{43}{8}}{2x - 3}$$

$$\pm x^3 \mp \frac{3}{2}x^2$$

$$0 \quad \frac{3}{2}x^2 + 2$$

$$\pm \frac{3}{2}x^2 \mp \frac{9}{4}x$$

$$0 \quad \frac{9}{4}x + 2$$

$$\pm \frac{9}{4}x \mp \frac{27}{8}$$

$$0 + \frac{43}{8}$$

$$= \frac{1}{2} \int x^2 dx + \frac{3}{4} \int x dx + \frac{9}{8} \int dx + \frac{43}{8} \int \frac{dx}{2x - 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{9}{8}x + \frac{43}{8} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{2x - 3} =$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{8} + \frac{9x}{8} + \frac{43}{16} \ln |2x - 3| + c$$

$$137) \int \frac{x^2}{x^2 - 5x + 4} dx = \int \frac{x^2}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\left(x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \int \frac{x^2 dx}{(x - 4)(x - 1)}$$

$$x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4$$

$$\frac{x^2}{(x - 4)(x - 1)} = \frac{Ax}{x - 4} + \frac{Bx}{x - 1}$$

$$x^2 = Ax(x - 1) + Bx(x - 4)$$

$$x^2 = Ax^2 - Ax + Bx^2 - 4Bx$$

$$\begin{aligned}
 196) \int \frac{x}{\sqrt{-x^2-3x+4}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-3+3}{\sqrt{-x^2-3x+4}} dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-3}{\sqrt{-x^2-3x+4}} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}} dx = -\sqrt{-x^2-3x+4} - \frac{3}{2} \arcsin \frac{2x+3}{5} + c \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{-x^2-3x+4} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}} dx + c = -\sqrt{-x^2-3x+4} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}} dx + c \\
 I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}} dx &= \frac{2}{5} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x+3}{5})^2}} dx = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t = \arcsin \frac{2x+3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+4}} &= \frac{1}{\sqrt{(-1)(x^2+3x-4)}} = \frac{1}{\sqrt{(-1)\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{16}{4}\right]}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4} - \frac{(2x+3)^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{4}\left[1 - \frac{(2x+3)^2}{25}\right]}} = \frac{1}{\frac{5}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2x+3}{5}\right)^2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x+3}{5}\right)^2}} \\
 t = \frac{2x+3}{5} &\Rightarrow dt = \frac{2}{5} dx \Rightarrow dx = \frac{5}{2} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 197) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2 - 1}} dx \\
 \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \frac{1}{\sqrt{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]}} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\frac{(2ax+b)^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}\left[\frac{(2ax+b)^2}{b^2-4ac} - 1\right]}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\sqrt{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2 - 1}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2 - 1}} \\
 t = \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} &\Rightarrow dt = \frac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}} dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} dt \\
 I = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| t + \sqrt{t^2-1} \right| + C
 \end{aligned}$$

podle  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \sqrt{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2 - 1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \sqrt{\frac{4a^2x^2+4abx+4ac}{b^2-4ac}} \right| + C \\
 I &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \sqrt{\frac{4a(ax^2+bx+c)}{b^2-4ac}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \sqrt{ax^2+bx+c} \right| + C \\
 I &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \left( \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right) \right| + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \right| + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right| + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right| + C \\
 \text{číslo } \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b^2-4ac}} \right| &\text{ je zahrnuto v integrační konstantě}
 \end{aligned}$$